- Es necesario superar el 40 % de la nota máxima de cada parte para compensar.
- **Cuestiones:** Hasta 1,5 puntos cada una (total: 3 puntos). **Conteste breve y razonadamente**, ajustándose a la pregunta y explicando.
- **Problemas:** Hasta 3,5 puntos cada uno (total problemas: 7 puntos) Debe resolverlos, no sólo decir cómo se se podrían resolver, ni poner la solución, sino que **hay que resolverlos realmente, explicar los pasos y discutir los resultados**. Recuerde definir **todas** las variables que use y **explicar** notación y fórmulas que utilice.
- No haga números hasta haber obtenido una expresión algebraica (estime entonces en órdenes de magnitud).
- **No se permite ni calculadora ni material auxiliar alguno.** **Tiempo:** 2 horas.

CUESTIONES (solamente para los alumnos que no hayan realizado la evaluación continua)

1.- Un átomo de hidrógeno se encuentra en $t=0$ en el estado cuántico cuya función de onda es $\Psi(\mathbf{r},0) = \sqrt{2/3}\ \psi_{200}(\mathbf{r}) + \sqrt{1/3}\ \psi_{210}(\mathbf{r})$, donde $\psi_{n\ell m}(\mathbf{r})$ son las funciones propias de la energía, del cuadrado del momento angular y de su componente z.

a) ¿Cuál es la evolución temporal de Ψ? ¿Es un estado estacionario?

b) Al medir sobre dicho estado el cuadrado del momento cinético, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidad?

c) ¿Cuál es el valor esperado de la coordenada x de la posición? ¿Varía dicho valor con el tiempo?

2.- Sean dos fermiones idénticos interactuantes de espín 1/2, con espines respectivos $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ y $\widehat{S}_{\text{total}} = \vec{S}_1+\vec{S}_2$. Definimos los operadores $\widehat{P}_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{\hbar^2}\left(\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2\right)$. ¿Cómo actúan estos operadores $\widehat{P}_\pm$ sobre los estados $|0,0\rangle$, $|1,1\rangle$, $|1,0\rangle$, $|1,-1\rangle$, estados propios de $\widehat{S}^2_{\text{total}}$ y $\widehat{S}_{\text{total},z}$?

PROBLEMAS

1.- Un oscilador armónico isótropo *bidimensional* confinado en el plano XY es perturbado por un potencial $V_p = \lambda(xL_z - L_z x)$, donde L_z es la componente Z del momento angular y λ es un número imaginario puro, de modo que V_p es real.

(a) Calcular las correcciones a la energía del estado fundamental a primero y segundo orden

(b) Calcular las correcciones a la energía del primer estado excitado a primero y segundo orden.

2.- Para estudiar los niveles de **rotación** de una molécula diatómica con momento de inercia I podemos considerarla como un rotor rígido tridimensional con hamiltoniano $\widehat{H}_0 = \widehat{L}^2/2I$. Supongamos, además, que la molécula posee un momento dipolar eléctrico $\vec{d}$ y está sometida a un campo eléctrico externo $\vec{\mathcal{E}}$ a lo largo de la dirección z, es decir, el hamiltoniano total es $\widehat{H} = \widehat{H}_0 - \vec{d}\cdot\vec{\mathcal{E}}$. Encontrar mediante un método variacional una cota superior para la energía del nivel fundamental.

Nota 1: Dada la simetría de la interacción, $\vec{d}\cdot\vec{\mathcal{E}}$, se sugiere (explique el porqué) utilizar una función de onda combinación lineal de los armónicos esféricos $Y_{0,0}(\theta,\varphi)$ y $Y_{1,0}(\theta,\varphi)$ (como el hamiltoniano solamente depende de las variables θ y φ, la función de onda también dependerá de ellas).

Nota 2: Puede ser útil la siguiente relación

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)\cos\theta = Y_{l+1,m}(\theta,\varphi)\sqrt{\frac{(l+1-m)(l+1+m)}{(2l+3)(2l+1)}} + Y_{l-1,m}(\theta,\varphi)\sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}}$$

Datos que podrían ser útiles: $h = 6{,}63\times10^{-34}$ J s, $1\text{ eV} = 1{,}6\times10^{-19}$ J $m_p = 1{,}67\times10^{-27}$ kg $m_e = 9{,}11\times10^{-31}$ kg, $R_\infty = 109737\text{ cm}^{-1}$, $e = 1{,}6\times10^{-19}$ C, $N_A = 60{,}2\times10^{22}$, $k_B = 1{,}38\times10^{-23}\text{ J K}^{-1}$ $\mu_b = e\hbar/(2m_e) = 9{,}27\times10^{-24}\text{ J T}^{-1}$, $c = 3\times10^8\text{ m s}^{-1}$, $a_o = 4\pi\epsilon_o\hbar^2/me^2 \simeq 0{,}52$ Å, $\lambda_C = h/(m_e c) = 0{,}024$ Å $1/(4\pi\epsilon_o) = 9\times10^9\text{ m}^3\text{ kg s}^{-2}\text{ C}^{-2}$

Integrales que podrían ser útiles:

$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}$ $\int_0^\infty xe^{-ax^2}dx = 1/(2a)$ $\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}dx = \frac{1}{4}\sqrt{\pi/a^3}$

$\int_0^\infty x^3e^{-ax^2}dx = 1/(2a^2)$ $\int_0^\infty x^4e^{-ax^2}dx = \frac{3}{8}\sqrt{\pi/a^5}$ $\int_0^\infty x^5e^{-ax^2}dx = 1/a^3$

$\int_0^\infty r^ne^{-ar}dr = n!/a^{n+1}$ $\int_0^t \exp(-x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(t)$ $\int x^2e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right)$

$\int\cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2}$ $\int x\cos^2 x\,dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}\cos(2x)$

$\int x^2\cos^2 x\,dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\sin(2x)$

Operadores de momento angular $\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$

$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$ $\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$